① La $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ med

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

(Variant 2).

Hvor mange elementer kan en lin. uavh. delmengde av S maksimalt ha?

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & -1 \\ 7 & 14 & -2 & 17 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} -3 \quad -7 \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 7 & 7 & 14 \\ 0 & 28 & 26 & 52 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{7} \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 28 & 26 & 52 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ -28 \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ 2 \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -1 \quad 2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Pivotelement : tre kolonner.

$$\rightsquigarrow x_3 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 3$$

$$\vec{v_4} = 3\vec{v_1} + 2\vec{v_3}$$

$$x_1 \cdot \vec{v_1} + x_2 \cdot \vec{v_2} + x_3 \cdot \vec{v_3} = \vec{v_4}$$

En lineært uavhengig delmengde av S er

$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$.

② Ser på $A\vec{x} = \vec{b}$ der A er en reell 3×3-matrise og $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Vet at den generelle løsningen til systemet er på formen

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hva kan vi si om A og $\vec{b}$?

a) $\cancel{\dim \mathrm{Nul} A = 2 \text{ og } \vec{b} \neq \vec{0}}$

b) $\cancel{\dim \mathrm{Nul} A = 2 \text{ og } \vec{b} = \vec{0}}$

c) $\cancel{\dim \mathrm{Col} A = 2 \text{ og } \vec{b} = \vec{0}}$

d) $\dim \mathrm{Col} A = 2$ og $\vec{b} \neq \vec{0}$

Vet at: (rank A)

- $\dim \mathrm{Nul} A + \dim \mathrm{Col} A = 3$
  (fordi A er en 3×3-matrise)
- $\dim \mathrm{Col} A$ = # kolonner med pivotelement når vi radreduserer A
- # Frie variabler = # kolonner uten pivotelement

Så $\dim \mathrm{Col} A = 2$

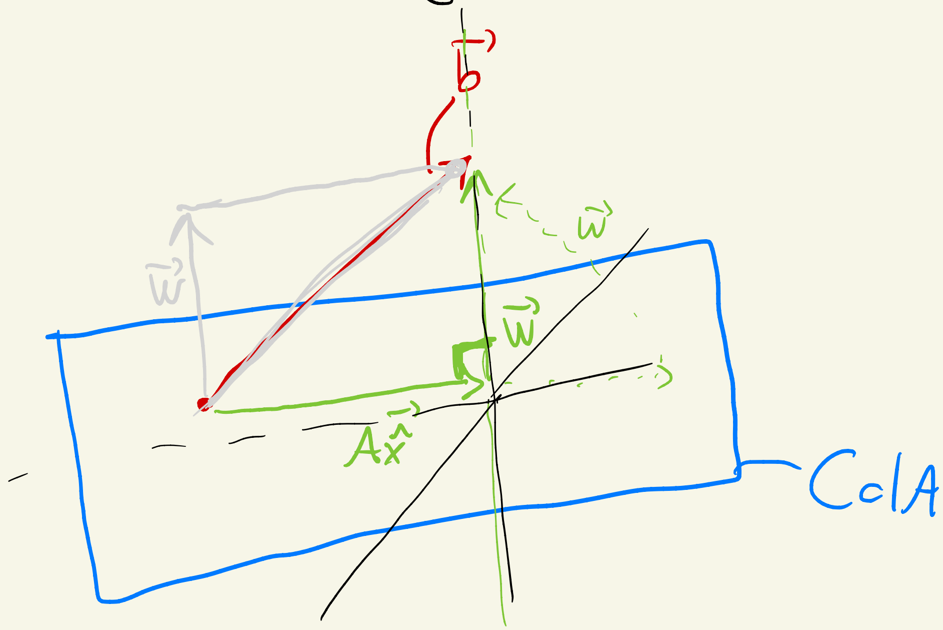
$\vec{0}$ er ikke en løsning, så $\vec{b} \neq \vec{0}$.

3. A en reell 3x2-matrise med lin. uavh. kolonner, $\vec{b}$ en vektor i $\mathbb{R}^3$ s.a. $A\vec{x} = \vec{b}$ ikke har en løsning.

$\vec{b} = A\hat{\vec{x}} + \vec{w}$

La $\hat{\vec{x}}$ være s.a. $\boxed{\vec{w} = \vec{b} - A\hat{\vec{x}}}$ har minimal lengde.

Hvilket underrom er det ortogonale komplementet til $\text{span}\{\vec{w}\}$?



$$(\text{Span}\{\vec{w}\})^{\perp} = \underline{\text{Col}A}$$

④ Bruker $a = 2$.

$$x'(t) = 3x(t) - 5y(t)$$
$$y'(t) = x(t) - 3y(t)$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

For hvilken initialverdi $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$ ligger $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ på en linje i $\mathbb{R}^2$ for alle t?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Egenverdier: $\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 5 \\ -1 & \lambda + 3 \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 3)(\lambda + 3) + 5$

$$= \lambda^2 - 9 + 5 = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Generell løsning $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2t} \vec{v}_1 + \cancel{c_2 e^{-2t} \vec{v}_2}$

$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$ må være en egenvektor.

Finner egenvektorer tilhørende $\lambda = 2$: $(\lambda I - A) \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x_1 = 5x_2 = 5s \\ x_2 = s \end{array}$$

Egenvektorene er på formen $s \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Så $\underline{\underline{\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}}}$

⑤ Bruker $n=3$

For hvilket reelt tall a er funksjonen $y(t) = te^{3t}$ en løsning av ligningen

$$y''(t) + a \cdot y'(t) + 9y(t) = 0 \text{ ?}$$

$y(t) = te^{\lambda t}$ dukker bare opp når det karakteriske polynomet har én reell rot. (én reell rot: $\lambda = 3$)

Karakteristisk polynom: $\lambda^2 + a \cdot \lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 9$

$$a = -6$$

7) Sett $u = 3+3i$, $v = 2-i$

a) Vis at hvis man betrakter $\mathbb{C}$ som et reelt vektorrom, så er $\mathcal{B} = \{u, v\}$ en basis for $\mathbb{C}$.

$\mathcal{B}$ må spenne ut $\mathbb{C}$ og være lin. uavh.

Spenn: For enhver $z = a+ib$ finnes $x, y \in \mathbb{R}$ slik at $z = a+ib = xu+yv$

$$a+ib = 3x + 3ix + 2y - iy$$

$$= 3x+2y + (3x-y)i$$

$$a = 3x+2y \qquad b = 3x-y$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & a \\ 3 & -1 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{a}{3} \\ 0 & -3 & b-a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{a}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a}{3}-\frac{b}{3} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a}{9}+\frac{2b}{9} \\ 0 & 1 & \frac{a-b}{3} \end{array}\right] \qquad x = \frac{a+2b}{9}$$

$$y = \frac{a-b}{3}$$

Lin. uavhengighet:

Anta $xu + yv = 0$ for $x, y \in \mathbb{R}$ og

$x \neq 0$ eller $y \neq 0$

$$(3+3i)x + (2-i)y = 0$$

$$(3+3i)x = -(2-i)y$$ Anta $y \neq 0$

$$\frac{x}{y} = \frac{-(2-i)}{3+3i} = -\frac{1}{6} + \frac{i}{2}$$

Anta $x \neq 0 \Rightarrow$ $\frac{y}{x} = \left(-\frac{1}{6} + \frac{i}{2}\right)^{-1}$

2b) Forklar hvorfor $\mathcal{B}$ ikke er en basis for $\mathbb{C}$ når det regnes som komplekst vektorrom.

$$z = xu + yv \qquad x, y \in \mathbb{C}$$

Utspenn funker fortsatt

Vis at u, v er lineært avhengige over $\mathbb{C}$

Fant $\frac{x}{y} = -\frac{1}{6} + \frac{i}{2}$ $\qquad x = -\frac{1}{6} + \frac{i}{2} \quad y = 1$

Evt. $\quad x = v \qquad y = -u$

$$xu + yv = vu - uv = 0$$

Dette viser at $xu + yv = 0$ har flere mulige løsninger

2c) Løs $z^5 + 4z = 0$ og skriv dem i basisen $\mathcal{B}$ ($\mathbb{C}$ er reelt vektorrom)

$$z^5 + 4z = z(z^4 + 4)$$

$$z_0 = 0 \quad \vee \quad z^4 = -4 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n}$$

$z_1 = 1+i \qquad z_2 = 1-i$

$z_3 = -1+i \qquad z_4 = -1-i$

Finn $[z_i]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_\beta \qquad \beta = \{u, v\}$

$$xu + yv = [z]_S$$

Eks $z_1 = 1+i \qquad a = 1,\ b = 1$ fra 7a)

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1+2-1}{9} = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{1-1}{3} = 0$$

$\Rightarrow \quad [z_1]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$

Den andre er tilsvarende

---

8) Finn reelle/komplekse 2x2-matriser som oppfyller følgende. Kall dem A og B.

a) Finn A, B slik at de har like egenverdier, men ikke er vanlekvivalente.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

Hvis $a, b, c, d \neq 0$, så er begge radekv. med I, altså med hverandre

Si $a = 0$. Da må enten c eller d være 0, siden egenverdiene til A er $0, b$

Hvis $c = 0$ vil begge ligro på $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ikke bra. Så setter $d = 0$.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Sett $b = c = 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ikke radekv, men like egenverdier

Andre eksempler: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

8b) A, B skal nå være radekvivalente, men ha forskjellig kolonnerom.

Inverterbare: Uheldige

O også ubrukelig.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Col}(A) = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{Col}(B) = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

B er en enkel radoperasjon unna A, men de har forskjellig kolonnerom

8c) Finn A slik at $A^2 + A + I = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 + A + I = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + a + 1 & 0 \\ 0 & b^2 + b + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Løs $a^2 + a + 1 = 0$ Finn $a = -\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Sett f. eks. $a = b = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

---

10) $U = \text{Span}\{te^{2t}, e^{2t}, e^t\}$ er et underrom av rommet av deriverbare funksjoner

$D : U \to U$ er lineærtransformasjonen gitt ved derivasjon ($D(f) = f'$)

a) Finn standardmatrisen til D med hensyn på basisen $\mathcal{B} = \{te^{2t}, e^{2t}, e^t\}$

Kall standardmatrisen A

Vil at $A[v]_\beta = D(v)$

$A = [a_1 | a_2 | a_3]$ med kolonner a_i

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_\beta = a_1 \quad A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}_\beta = a_2 \quad A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}_\beta = a_3$$

Så hvilken funksjon representerer $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_\beta$

Jo, $1 \cdot te^{2t} + 0 \cdot e^{2t} + 0 \cdot e^{t} = te^{2t}$

$$a_1 = A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_\beta = D(te^{2t}) = e^{2t} + 2te^{2t}$$

(Hvordan skriver vi dette i β?)

$$= \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}_\beta + 2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}_\beta$$

Så $A = \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \,\middle|\, a_2 \,\middle|\, a_3 \right]$

Videre:

$$a_2 = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta} = D\left(e^{2A}\right) = 2e^{2A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}_{\beta}$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Finn egenrommene til D, som underrom av U.

Finn egenrommene til matrisen A, og oversette dem til å ligge i U.

Egenverdier til A: $2, 1$ (leser av fra diagonal)

$$E_1(A) = \text{Null}\left(\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{A-1I} \right) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$E_2(A) = \text{Null}(A - 2I) = \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \text{Null}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$E_1(A)$ som underrom av U er $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B = e^{t}$

$E_2(A)$ i U er $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B = e^{2t}$

10c) Er D diagonaliserbar?

Nei, fant kun to lin. uavh. egenvektorer